13 MAGGIO 2020

III - IL CAMPO GAUSSIANO LIBERO DISCRETO

[Werner, Powell]

[Berestycki]

GFF = GAUSSIAN FREE FIELD

1. PASSEGGIATA ALEATORIA E PONTE GAUSSIANI

SIANO $Y_1, Y_2, \dots$ V.A. IID $N(0,1)$

LA PASSEGGIATA ALEATORIA GAUSSIANA $X = (X_n)_{n=0,1,2,\dots}$

$$X_n := X_{n-1} + Y_n \,, \quad n \geq 1; \qquad \text{SE } X_0 = 0, \quad X_n = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$$

$\forall\, N \in \mathbb{N}$, IL VETTORE $(X_1, \dots, X_N)$ HA DENSITÀ

$$f^{RW}(x_1, \dots, x_N) = c \cdot \exp\left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})^2 \right\}$$

DEFINIAMO PONTE GAUSSIANO DI LUNGHEZZA N IL VETTORE ALEATORIO $H = (H_1, \dots, H_{N-1})$ CHE HA LA STESSA LEGGE DI

"$(X_1, \dots, X_{N-1})$ CONDIZ. A $X_N = 0$".

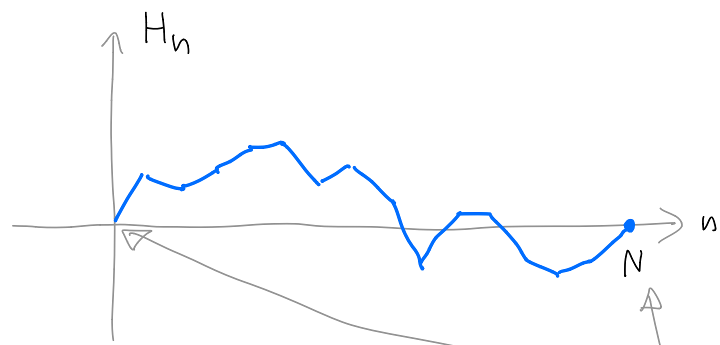
DEFINIZIONE

SI DICE PONTE GAUSS. DI LUNGH. $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$, UN VETT. AL. $H = (H_1, \dots, H_{N-1})$ CON DENSITÀ

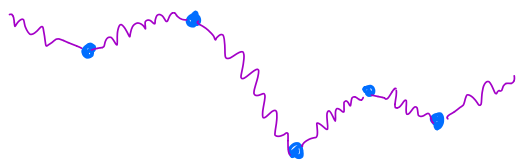
$$f_H(h_1, \dots, h_{N-1}) := \tilde{c}\, f^{RW}(h_1, \dots, h_{N-1}, 0)$$

$$= \tilde{c} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (h_i - h_{i-1})^2 \right\} \quad \text{CON } h_N := 0$$

INTUIZIONE



CATENA DI "PARTICELLE" COLLEGATE DA "MOLLE", CON **ESTREMI FISSATI**.



→ MODELLO DI BASE PER UN "POLIMERO"

VOGLIAMO DEFINIRE UNA ESTENSIONE A UN **DOMINIO MULTIDIMENSION.**

→ MODELLO PER MEMBRANE, INTERFACCE ALEATORIE

→ SI CHIAMA ANCHE "**CRISTALLO ARMONICO**"

<u>LEMMA</u> (MAGIA! FUNZIONA SOLO NEL CASO GAUSSIANO)

SE $X=(X_n)_{n\geq 0}$ E' PASS. AL. GAUSSIANA, ALLORA

$$H = \left(H_n := X_n - \frac{n}{N} X_N\right)_{n=1,\dots,N-1}$$

E' PONTE GAUSS. DI LUNGHEZZA N.

LEMMA

IL PONTE GAUSS. $H = (H_n)_{1 \le n \le N-1}$ È PROC. GAUSSIANO CENTRATO CON

$$\mathrm{Cov}[H_m, H_n] = \frac{m(N-n)}{N} = m\left(1 - \frac{n}{N}\right) \quad \text{SE } m \le n$$

IN PART. $\mathrm{Var}[H_{\frac{N}{2}}] = \frac{N}{2}$ (SE $N \in 2\mathbb{N}$)

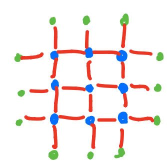
2. IL GFF DISCRETO IN UN DOMINIO DI $\mathbb{Z}^d$

$\mathbb{Z}^d$ È UN GRAFO NON ORIENTATO

- VERTICI : PUNTI $x \in \mathbb{Z}^d$
- ARCHI : COPPIE NON ORDINATE $e = \{x, y\}$ CON $|x-y| = 1 \iff x \sim y$

x E y SONO PRIMI VICINI $\Updownarrow$

$E = E_{\mathbb{Z}^d} = \{\text{ARCHI}\}$



OGNI VERTICE $x \in \mathbb{Z}^d$ HA ESATTAMENTE $2d$ PRIMI VICINI

$$x \sim x \pm e_i, \quad i = 1, \dots, d, \qquad e_i = (0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-ESIMA}}}{1}, 0, \dots, 0)$$

DATO $D \subseteq \mathbb{Z}^d$ SOTTOINSIEME DI VERTICI, DEF.

$$\partial D := \{x \in \mathbb{Z}^d \setminus D : d(x, D) = 1\}, \qquad \bar{D} := D \cup \partial D$$

"FRONTIERA ESTERNA" "CHIUSURA"

INDICHIAMO CON $E_D := \{\text{ARCHI INCIDENTI O CONTENUTI IN } D\}$

$$E_D := \{e = \{x, y\} : x \sim y, \ x \in D \text{ OPPURE } y \in D\}$$

DEFINIZIONE (GFF)

SIA $D \subseteq \mathbb{Z}^d$ FINITO. SI DICE GFF = CAMPO LIBERO GAUSSIANO SU D (CON CONDIZIONI AL BORDO NULLE, O DI DIRICHLET) UN VETT. ALEAT. $H = (H_x)_{x \in D}$ CHE HA DENSITÀ

$$f_H\left(h = (h_x)_{x \in D}\right) = c \cdot \exp\Big\{-\frac{1}{4} \underbrace{\sum_{\substack{x,y \in \bar{D} \\ x \sim y}}}_{(x,y) \text{ E } (y,x) \text{ GENERANO } \{x,y\}} (h_x - h_y)^2\Big\}$$

$$= c \cdot \exp\Big\{-\frac{1}{2} \underbrace{\sum_{e \in E_D} |\nabla h_e|^2}_{\text{ENERGIA DI DIRICHLET}}\Big\}$$

DOVE PONIAMO $h_x \equiv 0$ PER $x \in \partial D$

MOSTREREMO CHE LA DEF. È BEN POSTA (= LA DENSITÀ È INTEGRABILE)

" " H È UN VETTORE GAUSSIANO.

CARATTERIZZEREMO LA COVARIANZA $K_D(x,y) := \mathrm{Cov}[H_x, H_y]$ COME SOLUZIONE DI UN SISTEMA LINEARE CHE COINVOLGE IL LAPLACIANO DISCRETO. MOSTREREMO CHE ESSA È LEGATA ALLA FUNZIONE DI GREEN DELLA PASSEGGIATA ALEATORIA SEMPLICE SU $\mathbb{Z}^d$.

SE $D = D_N = \{1, \dots, N-1\}^d$, LA VARIANZA DEL GFF NEL CENTRO VALE

$$\mathrm{Var}\left[H_{(\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2})}\right] \sim \begin{cases} \frac{N}{2} & \text{SE } d = 1 \\ c \log N & \text{SE } d = 2 \\ c'_d & \text{SE } d \geq 3 \end{cases}$$

3. COVARIANZA DEL GFF DISCRETO

DATA $f : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}$, DEF. IL LAPLACIANO DISCRETO

$f = (f_x)_{x \in \mathbb{Z}^d}$

$$\Delta f_x = \sum_{y \sim x} (f_y - f_x) = \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} \Delta_{xy} f_y$$

$$\Delta_{xy} = \begin{cases} 1 & \text{SE } y \sim x \\ -(2d) & \text{SE } y = x \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases} \qquad x, y \in \mathbb{Z}^d$$

LEMMA

PER OGNI $h = (h_x)_{x \in D} \in \mathbb{R}^D$, CON D FINITO, SI HA

$$\frac{1}{2} \sum_{\substack{x,y \in \bar{D} \\ x \sim y}} (h_x - h_y)^2 = - \sum_{x \in D} h_x \Delta h_x \qquad (\star)$$

$$= \langle h, (-\Delta_D) h \rangle$$

AVENDO POSTO $h \equiv 0$ SU ∂D E $\Delta_D := (\Delta_{x,y})_{x,y \in D}$.

DIM.

$$\sum_{\substack{x,y \in \bar{D} \\ x \sim y}} (h_x - h_y)^2 = \sum_{\substack{x,y \in \bar{D} \\ x \sim y}} h_x (h_x - h_y) - \sum_{\substack{x,y \in \bar{D} \\ x \sim y}} h_y (h_x - h_y)$$

$$= -2 \sum_{x \in \bar{D}} h_x \sum_{\substack{\cancel{y \in \bar{D}} \\ y \sim x}} (h_y - h_x)$$

$$= -2 \sum_{x \in D} h_x \Delta h_x$$

■

OSS. Δ_D AGISCE SU VETTORI $f = (f_x)_{x \in D} \Leftrightarrow$ SU FUNZ. $f : D \to \mathbb{R}$

OSSERVIAMO CHE $\Delta_D = (\Delta_{x,y})_{x,y\in D}$ È MATRICE SIMMETRICA

INOLTRE $(-\Delta_D)$ È DEFINITA > 0

$$\circledast \quad \langle h, (-\Delta_D) h \rangle = \frac{1}{2} \sum_{\substack{x,y\in \bar{D} \\ x\sim y}} (h_x - h_y)^2 \geq 0 \quad \forall h \in \mathbb{R}^D$$

[PONGO $h \equiv 0$ SU ∂D]

$$\langle h, (-\Delta_D) h \rangle = 0 \iff h = \text{COST. SU } \bar{D}$$

$$\Rightarrow h \equiv 0 .$$

IN PART. $(-\Delta_D)$ È INVERTIBILE : $\det(-\Delta_D) > 0$.

COROLLARIO (DEF. ALTERNATIVA DEL GFF DISCR.)

IL GFF $H = (H_x)_{x\in D}$ È UN VETTORE GAUSSIANO CENTRATO CON

$$K_D(x,y) = \mathrm{Cov}[H_x, H_y] = (-\Delta_D)^{-1}_{xy}$$

CIOÈ $H \sim N(0, (-\Delta_D)^{-1})$.

$\forall x\in D$, LA FUNZ $K_x(\cdot) := K_D(x,\cdot) = K_D(\cdot, x)$ È SOLUZ. DI

$$(\Delta_D K_x)(y) = -\delta_{xy} \qquad \forall x,y \in D .$$

DIM. PER DEF. + $\circledast$ H HA DENSITÀ $c \cdot \exp\{-\frac{1}{2}\langle h, (-\Delta_D) h\rangle\}$

RICORDIAMO CHE $X \sim N(0,K)$ CON $\det K \neq 0$ HA DENS. $c \cdot \exp\{-\frac{1}{2}\langle h, K^{-1} h\rangle\}$

DUNQUE $K^{-1} = (-\Delta_D) \iff K = (-\Delta_D)^{-1} \iff \Delta_D K = -I$.

$\blacksquare$

4. FUNZIONE DI GREEN

SAPPIAMO CHE $H_D = (H_x)_{x \in D} \sim N(0, (-\Delta_D)^{-1})$.

POSSIAMO "CALCOLARE" $(-\Delta_D)^{-1}$? DEFINIAMO

$$P_{xy} := \frac{1}{2d} \mathbb{1}_{\{x \sim y\}}$$ MATRICE DI ADIACENZA "NORMALIZZATA" DI $\mathbb{Z}^d$

SIA $P_D = (P_{xy})_{x,y \in D}$ LA RESTRIZIONE DI P A D.

ALLORA $$\Delta_D = (2d)\,(P_D - I)$$ I: IDENTITÀ

LEMMA

SI HA $$(-\Delta_D)^{-1} = \frac{1}{2d} \sum_{k=0}^{\infty} P_D^k$$

DIM. $$(-\Delta_D)^{-1} = \frac{1}{2d} (I - P_D)^{-1}.$$ $(1-x)^{-1} = \frac{1}{1-x} = \sum_{k \geq 0} x^k$.

FATTO: A MATRICE T.C. $\sum_{k=0}^{\infty} (A^k)_{xy} < \infty \quad \forall x,y \Rightarrow (I-A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$

INFATTI $$(I-A) \sum_{k=0}^{N} A^k = \sum_{k=0}^{N} (A^k - A^{k+1}) = I - A^{N+1} \xrightarrow[N \to \infty]{} I$$

$$\Rightarrow (I-A) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} A^k = I \quad \text{CIOÈ} \quad (I-A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k.$$

RESTA DA MOSTRARE CHE $\sum_{k=0}^{\infty} (P_D)^k_{xy} < \infty$ $\forall x,y \in D$. VEDI SOTTO ■

PASSEGGIATA ALEATORIA SEMPLICE $X = (X_n)_{n \geq 0}$ SU $\mathbb{Z}^d$

$$\mathbb{P}\big[X_{n+1} = y \mid X_n = x, \underbrace{\ldots}_{\in \sigma(X_0, \ldots, X_{n-1})}\big] := \frac{1}{2d} \mathbb{1}_{\{x \sim y\}} = P_{x,y}$$

MATRICE DI TRANS.

SIA τ_D IL TEMPO DI USCITA DI X DA D:

$$\tau_D := \min\{n \geq 0 : X_n \notin D\}$$

ALLORA PER $x, y \in D$ SI HA

$$\mathbb{P}_x[X_k = y, \tau_D > k] = \mathbb{P}_x[X_1 \in D, \dots, X_{k-1} \in D, X_k = y] = (P_D)^k_{xy}$$

$X_0 = x$

DEFINIZIONE (FUNZIONE DI GREEN)

SI DICE FUNZIONE DI GREEN DEL DOMINIO $D \subseteq \mathbb{Z}^d$

$$G_D(x,y) := \sum_{k=0}^{\infty} (P_D)^k_{xy} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}_x[X_k = y, \tau^D > k] = \mathbb{E}_x\Big[\underbrace{\sum_{k=0}^{\tau_D - 1} \mathbb{1}_{\{X_k = y\}}}_{}\Big]$$

TEMPO PASSATO DA X IN y
PRIMA DI ABBANDONARE D.

IN DEFINITIVA, ABBIAMO MOSTRATO IL SEGUENTE RISULTATO.

TEOREMA (GFF E FUNZ. DI GREEN)

IL GFF $H_D = (H_x)_{x \in D}$ E' UN VETTORE GAUSSIANO CENTRATO CON

$$\mathrm{Cov}[H_x, H_y] = \frac{1}{2d} G_D(x,y)$$

OSSIA $H_D \sim N\left(0, \frac{1}{2d} G_D\right)$

LEMMA

SE $D \subseteq \mathbb{Z}^d$ FINITO, ALLORA $G_D(x,y) < \infty \quad \forall x,y \in D$.

DIM BASTA MOSTRARE CHE $\sum_{y \in D} G_D(x,y) = \mathbb{E}_x[\tau_D] < \infty$

SUGG: MOSTRARE CHE $\exists\, n \in \mathbb{N} \left(= \mathrm{diam}_{\ell_1}(D) + 1\right)$ T.C.

$$\forall x \in D : \quad \mathbb{P}_x(\tau^D \leq n) \geq \frac{1}{(2d)^n} =: \eta > 0.$$

DA CIÒ SEGUE CHE

$$\mathbb{P}_x(\tau^D > \ell n) \leq (1-\eta)^\ell \quad \forall \ell \in \mathbb{N}.$$

$\Rightarrow \mathbb{E}_x[\tau^D] < \infty$. ∎

ESERCIZIO: MOSTRARE, USANDO LA FORMULA

$$G_D(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}_x(X_k = y, \tau_D > k)$$

E LA PROPR. DI MARKOV, CHE $G_D(x,y)$ È SIMMETRICA IN (x,y)

E INOLTRE $\quad (\Delta_D G_D(\cdot,y))_x = -(2d)\,\delta_{x,y}$.

(PROPRIETÀ GIÀ DIMOSTRATE IN ALTRO MODO).

5. - PROPRIETÀ DI MARKOV DEL GFF DISCRETO

SIA (Y, Z) VETTORE ALEAT. IN $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ CON DENSITÀ $f_{(Y,Z)}(y,z)$

"LEGGE CONDIZIONALE DI Y DATA $Z = z$": PROBAB. SU $\mathbb{R}^m$ CON DENSITÀ

$$y \mapsto c\, f_{(Y,Z)}(y,z)$$

$$c_z = \frac{1}{\int f_{(Y,Z)}(y,z)\,dy}$$

LEMMA

SIA $H_D = (H_x)_{x\in D}$ GFF SU D, SIA $x \in D$. LA LEGGE CONDIZ. DI H_x DATO $H_{D\setminus\{x\}} = (H_y)_{y\in D\setminus\{x\}} = h_{D\setminus\{x\}} = (h_y)_{y\in D\setminus\{x\}}$ È

$$N\left(\bar{h}_x, \frac{1}{2d}\right) \qquad \text{DOVE} \qquad \bar{h}_x = Ph_x = \frac{1}{2d}\sum_{y\sim x} h_y$$

DIM.
$$f_H(h_x, h_{D\setminus\{x\}}) = c(h_{D\setminus\{x\}}) \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{y\sim x}(h_x - h_y)^2\right\}$$
$$= \tilde{c}(h_{D\setminus\{x\}}) \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}\cdot(2d)\cdot(h_x - \bar{h}_x)^2\right\}$$

∎

DEFINIZIONE (GFF CON CONDIZIONI AL BORDO)

SIA $D \subseteq \mathbb{Z}^d$ FINITO, SIA $f: \partial D \to \mathbb{R}$. SI DICE GFF SU D CON CONDIZ. AL BORDO f UN VETT. AL. $H_D = (H_x)_{x\in D}$ CON DENS.

$$f_H(h = (h_x)_{x\in D}) = c \cdot \exp\left\{-\frac{1}{4}\sum_{\substack{x,y\in\bar{D} \\ x\sim y}}(h_x - h_y)^2\right\}$$

DOVE PONIAMO $h_x = f_x \ \forall x \in \partial D$.

PROPOSIZIONE

SIA H_D = GFF SU D. SIA $D = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$, $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$.
LA LEGGE CONDIZ. DI $H_A = (H_x)_{x \in A}$ DATO $H_B = h_B = (h_y)_{y \in B}$ È

LA LEGGE DEL GFF SU A CON CONDIZ. AL BORDO $h_{\partial A}$.

DIM. ESERCIZIO.

SIA $D \subseteq \mathbb{Z}^d$ FINITO, SIA $f : \partial D \to \mathbb{R}$ ASSEGNATA.
CERCHIAMO $F : \bar{D} = D \cup \partial D \to \mathbb{R}$ CHE RISOLVE IL PROBL. DI DIRICHLET

$$\begin{cases} \Delta F_x = 0 & x \in D \\ F_y = f_y & y \in \partial D \end{cases} \qquad (\text{𝄞})$$

SOTTOLINEIAMO CHE COMPARE Δ E NON Δ_D.

PROPOSIZIONE

ESISTE ED È UNICA LA SOLUZ. F DI (𝄞). È DATA DA

$$F_x = (G_D P f)_x \quad \text{PER } x \in D, \quad \text{DOVE } (Pf)_z = \frac{1}{2d} \sum_{\substack{y \sim z \\ y \in \partial D}} f_y$$
$$= E_x\left[f(X_{\tau_D}) \right]$$

(CIOÈ f È ESTESA A $f : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}$ PONENDO $f \equiv 0$ SU $\mathbb{Z}^d \setminus \partial D$)

DIM. MOSTRARE CHE $\forall x \in D$ E $\forall F : \bar{D} \to \mathbb{R}$ T.C. $F_y = f_y \; \forall y \in \partial D$,

$$\Delta F_x = \Delta_D F_x + (2d) P f_x$$

DUNQUE (f) È EQUIVALENTE A

$$\left.\begin{aligned} -\Delta_D F &= (2d)\, Pf \\ \text{DUNQUE}\quad F &= (2d)\,(-\Delta_D)^{-1}\, Pf \\ &= \cancel{(2d)}\,\frac{1}{\cancel{2d}}\, G_D\, Pf \end{aligned}\right\}\ \text{SU } D.$$

F SOLUZ. DI (f) È DETTA ESTENSIONE ARMONICA DI f A D.

TEOREMA

SIA H_D GFF SU D CON CONDIZ. AL BORDO $f : \partial D \to \mathbb{R}$.
SIA $F : \bar{D} \to \mathbb{R}$ ESTENSIONE ARMONICA DI f A D.
ALLORA $\tilde{H}_D := H_D - F_D = (H_x - F_x)_{x \in D}$ È GFF SU D CON CONDIZIONI AL BORDO NULLE

TEOREMA

SIA $H_D = (H_x)_{x \in D}$ GFF SU D STANDARD (CONDIZ. AL BORDO NULLE).
SIA $D = A \cup B$, $A \cap B = \phi$, $A \neq \phi$, $B \neq \phi$.
ALLORA POSSO DECOMPORRE

$$H_x = H_x^A + H_x^B \qquad \forall x \in D$$

IN MODO CHE
- $(H_x^A)_{x \in D}$ È NULLO IN B E GFF STANDARD IN A
- $(H_x^B)_{x \in D}$ È ARMONICO IN A: $\Delta H_x^B = 0 \ \forall x \in A$
- (H_x^A) E (H_x^B) SONO INDIPENDENTI.